

**تمرين 1:**

لتكن  $(U_n)$  المتتالية العددية المعرفة بمايلي :  $\begin{cases} U_0 = 11 \\ U_{n+1} = \frac{10}{11}U_n + \frac{12}{11} ; n \in \mathbb{N} \end{cases}$

(1) احسب  $U_1$  و  $U_2$  :

$$U_2 = \frac{1252}{121} \text{ و } U_1 = \frac{122}{11}$$

(2) تحقق من ان :  $U_{n+1} - 12 = \frac{10}{11}(U_n - 12)$  لكل  $n$  من  $\mathbb{N}$

$$U_{n+1} - 12 = \frac{10}{11}U_n + \frac{12}{11} - 12 = \frac{10}{11}U_n - \frac{120}{11} = \frac{10}{11}(U_n - 12)$$

وبالتالي  $U_{n+1} - 12 = \frac{10}{11}(U_n - 12)$  لكل  $n$  من  $\mathbb{N}$

(3) أ- بين بالترجع ان  $U_n < 12$  لكل  $n$  من  $\mathbb{N}$

من اجل  $n = 0$  لدينا  $U_0 = 11$  و  $11 \leq 12$  اذن  $U_0 \leq 12$

نفترض ان :  $U_n \leq 12$  ;  $\forall n \in \mathbb{N}$  و نبين ان  $U_{n+1} \leq 12$

$$\text{لدينا } U_n \leq 12 \text{ و اي ان } \frac{10}{11}U_n \leq \frac{120}{11} \text{ اي } \frac{10}{11}U_n + \frac{12}{11} \leq \frac{120}{11} + \frac{12}{11}$$

$$\text{وبالتالي } U_{n+1} \leq 12 \text{ ومنه } U_{n+1} \leq \frac{132}{11}$$

$$\text{ومنه } \forall n \in \mathbb{N} ; U_n \leq 12$$

ب- بين ان  $(U_n)$  تزايدية قطعا

$$U_{n+1} - U_n = \frac{10}{11}U_n + \frac{12}{11} - U_n = \frac{-1}{11}U_n + \frac{12}{11} = \frac{1}{11}(12 - U_n) > 0$$

(لان  $\forall n \in \mathbb{N} ; U_n \leq 12$ )

(4) لتكن  $(V_n)$  المتتالية العددية بحيث  $\forall n \in \mathbb{N} V_n = U_n - 12$

أ- بين ان المتتالية  $(V_n)$  متتالية هندسية اساسها  $\frac{10}{11}$

$$V_{n+1} = U_{n+1} - 12 = \frac{10}{11}(U_n - 12) = \frac{10}{11}V_n = qV_n$$

ومنه فان المتتالية  $(V_n)$  متتالية هندسية اساسها  $\frac{10}{11}$

ب- اكتب  $(V_n)$  بدلالة  $n$

$$\text{لدينا } \forall n \in \mathbb{N} V_n = U_n - 12 \text{ وبالتالي } V_0 = U_0 - 12 = 11 - 12 = -1$$

وبما ان المتتالية  $(V_n)$  متتالية هندسية اساسها  $\frac{10}{11}$

$$\text{فان } \forall n \in \mathbb{N} V_n = V_0 q^n = -1 \times (4)^n = -(4)^n$$

ت- بين ان  $\forall n \in \mathbb{N} U_n = 12 - \left(\frac{10}{11}\right)^n$

$$\forall n \in \mathbb{N} V_n = U_n - 12 \Leftrightarrow U_n = V_n + 12 = 12 - \left(\frac{10}{11}\right)^n$$

تمرين II: ليكن  $ABCD$  متوازي الاضلاع و  $P$  و  $Q$  و  $R$  النقط المعرفة بمايلي :

$$\overrightarrow{AP} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB} \quad \text{و} \quad \overrightarrow{AR} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AD} \quad \text{و} \quad PQRA \text{ متوازي الاضلاع}$$

نريد ان نبرهن على ان المستقيمات  $(CQ)$  و  $(DP)$  و  $(BR)$  متلاقية  
 (1) بين ان  $P$  مرجح  $A$  و  $B$  معينتين بمعاملين يتم تحديدهما

$$\overrightarrow{AP} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB} \Leftrightarrow 3\overrightarrow{AP} = 2\overrightarrow{AP} + 2\overrightarrow{PB}$$

$$\Leftrightarrow 3\overrightarrow{AP} - 2\overrightarrow{AP} - 2\overrightarrow{PB} = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{PA} + 2\overrightarrow{PB} = \vec{0}$$

ومنه ان  $P$  مرجح  $(A;1)$  و  $(B;2)$

(ب) بين ان  $R$  مرجح  $A$  و  $D$  معينتين بمعاملين يتم تحديدهما

$$\overrightarrow{AR} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AD} \Leftrightarrow 4\overrightarrow{AR} = 3\overrightarrow{AR} + 3\overrightarrow{RD}$$

$$\Leftrightarrow 4\overrightarrow{AR} - 3\overrightarrow{AR} - 3\overrightarrow{RD} = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{RA} + 3\overrightarrow{RD} = \vec{0}$$

ومنه ان  $R$  مرجح  $(A;1)$  و  $(D;3)$

(2) لتكن  $I$  نقطة تقاطع  $(DP)$  و  $(BR)$  ولتكن  $G$  مرجح  $(A,1)$  و  $(B,2)$  و  $(D,3)$

بين ان  $I=G$  (\*)

لدينا  $G$  مرجح  $(A,1)$  و  $(B,2)$  و  $(D,3)$ ، حسب تجمعية المرجح ، لدينا :

$G \in (DP)$  اي  $(D,3)$  و  $G \in (BR)$  مرجح  $(B,2)$  و  $(R,4)$  اي  $G \in (BR)$

ومنه فإن  $G$  نقطة تقاطع  $(DP)$  و  $(BR)$  وبالتالي  $I=G$

(3) بين ان  $Q$  مرجح  $(A,-5)$  و  $(B,8)$  و  $(D,9)$  (\*\*)

لدينا  $PQRA$  متوازي الاضلاع، اذن  $\overrightarrow{QR} + \overrightarrow{QP} = \overrightarrow{QA}$

يعني :  $\overrightarrow{QR} + \overrightarrow{QP} - \overrightarrow{QA} = \vec{0}$  اي  $Q$  مرجح  $(A,-1)$  و  $(P,1)$  و  $(R,1)$

وبما أن  $P$  مرجح  $(A; \frac{1}{3})$  و  $(B; \frac{2}{3})$  و  $R$  مرجح  $(A; \frac{1}{4})$  و  $(D; \frac{3}{4})$

فإن  $Q$  مرجح  $(A,-1)$  و  $(A; \frac{1}{3})$  و  $(B; \frac{2}{3})$  و  $(A; \frac{1}{4})$  و  $(D; \frac{3}{4})$  وحسب خاصية الصمود بضرب

المعاملات في 12 نحصل على :

$Q$  مرجح  $(A,-12)$  و  $(A;4)$  و  $(B;8)$  و  $(A;3)$  و  $(D;9)$

وبالتالي  $Q$  مرجح  $(A,-5)$  و  $(B,8)$  و  $(D,9)$

تجمعية المرجح

(4) استنتج ان  $Q$  منتصف  $[CI]$

لدينا  $ABCD$  متوازي الاضلاع، اذن  $\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{CA}$  فإن  $\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{CD} - \overrightarrow{CA} = \vec{0}$

ومنه  $C$  مرجح  $(A,-1)$  و  $(B,1)$  و  $(D,1)$  اي  $C$  مرجح  $(A,-6)$  و  $(B,6)$  و  $(D,6)$

وبما ان  $I$  مرجح  $(A,1)$  و  $(B,2)$  و  $(D,3)$  و  $Q$  مرجح  $(A,-5)$  و  $(B,8)$  و  $(D,9)$

فإن  $Q$  مرجح  $(A,-6)$  و  $(B;6)$  و  $(D;6)$  و  $(A;1)$  و  $(B;2)$  و  $(D;3)$

$(I;6)$

$(C;6)$

اي  $Q$  مرجح  $(C,6)$  و  $(I;6)$  وهذا يعني ان  $Q$  منتصف  $[CI]$

(5) استنتج ان المستقيمات  $(CQ)$  و  $(DP)$  و  $(BR)$  متلاقية

لدينا  $Q$  منتصف  $[C]$  ومنه  $I \in (CQ)$

ولدينا  $I$  نقطة تقاطع  $(DP)$  و  $(BR)$

اذن المستقيمات  $(CQ)$  و  $(DP)$  و  $(BR)$  تتلاقى في النقطة  $I$

خاصية الصمود

تجمعية المرجح

تمرين III (\*): لتكن  $(U_n)$  المتتالية العددية المعرفة بمايلي :

$$\forall n \in \mathbb{N} : U_{n+1} = \sqrt{\frac{1+U_n}{2}} \text{ و } U_0 \in [0; 1]$$

1- بين أن:  $\forall n \in \mathbb{N} ; U_n \in [0; 1]$  من اجل  $n=0$  لدينا  $U_0 \in [0; 1]$  ومنه الخاصية صحيحة من اجل  $n=0$

نفترض  $\forall n \in \mathbb{N} ; U_n \in [0; 1]$

ونبين ان  $U_{n+1} \in [0; 1]$

لدينا  $0 \leq U_n \leq 1$  يعني  $1 \leq U_n + 1 \leq 2$  اي  $\frac{1}{2} \leq \frac{U_n+1}{2} \leq 1$

ومنه  $0 \leq \sqrt{\frac{1}{2}} \leq \sqrt{\frac{1+U_n}{2}} \leq 1$  وبالتالي  $U_{n+1} \in [0; 1]$

اذن  $\forall n \in \mathbb{N} ; U_n \in [0; 1]$

2- بين أن : المتتالية  $U_n$  تزايدية

ضرب في المرافق

$$U_{n+1} - U_n = \sqrt{\frac{1+U_n}{2}} - U_n = \frac{1+U_n - U_n^2}{\sqrt{1+U_n} + U_n} = \frac{1+U_n - U_n^2}{2\left(\sqrt{\frac{1+U_n}{2}} + U_n\right)} = \frac{(1-U_n)(1+2U_n)}{2\left(\sqrt{\frac{1+U_n}{2}} + U_n\right)}$$

ولدينا  $U_n \leq 1$  اي  $1 - U_n \geq 0$  و  $1 \leq 1 + 2U_n \leq 3$  اي  $0 \leq U_n \leq 1$

اذن  $(1 - U_n)(1 + 2U_n) \geq 0$  و  $2\left(\sqrt{\frac{1+U_n}{2}} + U_n\right) \geq 0$

وبالتالي  $U_{n+1} - U_n \geq 0$  وهذا يعني ان المتتالية  $U_n$  تزايدية

3- نضع:  $U_0 = \cos(\theta)$  حيث  $\theta \in [0; \frac{\pi}{2}]$

بين أن  $\forall n \in \mathbb{N} ; U_n = \cos\left(\frac{\theta}{2^n}\right)$  (علما ان  $2\cos^2(y) = 1 + \cos(2y)$ )

من اجل  $n=0$  لدينا  $U_0 = \cos(\theta)$  ومنه الخاصية صحيحة من اجل  $n=0$

نفترض  $\forall n \in \mathbb{N} ; U_n = \cos\left(\frac{\theta}{2^n}\right)$

ونبين ان  $U_{n+1} = \cos\left(\frac{\theta}{2^{n+1}}\right)$

لدينا  $U_n = \cos\left(\frac{\theta}{2^n}\right)$

$$U_{n+1} = \sqrt{\frac{1+U_n}{2}} = \sqrt{\frac{1+\cos\left(\frac{\theta}{2^n}\right)}{2}} = \sqrt{\frac{1+\cos\left(2\frac{\theta}{2^{n+1}}\right)}{2}} = \sqrt{\frac{2\cos^2\left(\frac{\theta}{2^{n+1}}\right)}{2}} \text{ فإن}$$

اي  $U_{n+1} = \cos\left(\frac{\theta}{2^{n+1}}\right)$  (علما ان  $2\cos^2(y) = 1 + \cos(2y)$ )

ومنه  $\forall n \in \mathbb{N} ; U_n = \cos\left(\frac{\theta}{2^n}\right)$

الاستدلال بالترجع

هذا وبالله التوفيق