الثانوية الجاحظ التأهيلية	تصحيح فرض محروس رقم 2 الدورة الاولى في مادة الرياضيات	سنة الدراسية :2012/2013
المستوى : 2 باك علوم تجريبية		استاذ : عبدالفتاح قويدر

تمرين الاول:

لتكن $(\mathrm{U_n})$ المتتالية العددية المعرفة بمايلي : $\begin{cases} \mathrm{U_0} = 1 \\ \mathrm{U_{n+1}} = \frac{3U_n+2}{2+\mathrm{U_n}} \; ; n \in \mathbb{N} \end{cases}$

1) احسب $\mathrm{U_1}$ و $\mathrm{U_2}$

$$\mathrm{U_1} = \frac{3U_0+2}{2+\mathrm{U_0}} = \frac{5}{3} \quad \text{و} \quad \mathrm{U_2} = \frac{3U_1+2}{2+\mathrm{U_1}} = \frac{21}{11}$$

2) بين بالترجع $\forall n \in \mathbb{N} \; ; \; 1 \leq \mathrm{U_n} < 2$

من اجل n=0 لدينا $\mathrm{U_0} = 1$ و $2 > 1 \geq 1$ اذن $1 \leq \mathrm{U_0} < 2$

نفترض ان $\forall n \in \mathbb{N} \; ; \; 1 \leq \mathrm{U_n} < 2$: و نبين ان $1 \leq \mathrm{U_{n+1}} < 2$

لدينا $U_{n+1} - 2 = \frac{U_n-2}{U_n+2}$ و لدينا $1 \leq \mathrm{U_n} < 2$ فإن $\frac{U_n-2}{U_n+2} < 0$ اي $\mathrm{U_{n+1}} < 2$

$U_{n+1} - 1 = \frac{2U_n}{U_n+2}$ و لدينا $\mathrm{U_n} > 0$ فإن $\frac{2U_n}{U_n+2} > 0$ اي $\mathrm{U_{n+1}} > 1$

وبالتالي $1 \leq \mathrm{U_{n+1}} < 2$

ومنه $\forall n \in \mathbb{N} \; ; \; 1 \leq \mathrm{U_n} < 2$

3) أ- تحقق من ان $\mathrm{U_{n+1}} - \mathrm{U_n} = \frac{(\mathrm{U_n}+1)(2-\mathrm{U_n})}{2+\mathrm{U_n}}$

$$\mathrm{U_{n+1}} - \mathrm{U_n} = \frac{3U_n+2}{2+\mathrm{U_n}} - \mathrm{U_n} = \frac{3U_n+2-\mathrm{U_n^2}-2\mathrm{U_n}}{2+\mathrm{U_n}} = \frac{-\mathrm{U_n^2}+\mathrm{U_n}+2}{2+\mathrm{U_n}} = \frac{(\mathrm{U_n}+1)(2-\mathrm{U_n})}{2+\mathrm{U_n}}$$

ب- ادرس رتابة المتتالية $(\mathrm{U_n})$

لدينا $U_{n+1} - \mathrm{U_n} = \frac{(\mathrm{U_n}+1)(2-\mathrm{U_n})}{2+\mathrm{U_n}}$ و $\forall n \in \mathbb{N} \; ; \; 1 \leq \mathrm{U_n} < 2$ فإن $2 -_{\mathrm{n}} > 0$

و $\frac{\mathrm{U_n}+1}{2+\mathrm{U_n}} > 0$ و منه $\mathrm{U_{n+1}} > \mathrm{U_n}$ و بالتالي فإن $(\mathrm{U_n})$ تزايدية قطعا

ج- استنتج ان $(\mathrm{U_n})$ متقاربة

بما أن $(\mathrm{U_n})$ تزايدية ومكبورة بالعدد 2 فإنها متقاربة

4) نضع $V_{\mathrm{n}} = \frac{U_{\mathrm{n}}+1}{U_{\mathrm{n}}-2} \quad \forall \mathrm{n} \in \mathbb{N}$

أ- بين ان $(\mathrm{V_n})$ متتالية هندسية اساسها4

$$V_{\mathrm{n+1}} = \frac{\mathrm{U_{n+1}}+1}{\mathrm{U_{n+1}}-2} = \frac{\frac{\mathrm{U_n}+1}{\mathrm{U_n}-2}+1}{\frac{\mathrm{U_n}+1}{\mathrm{U_n}-2}-2} = \frac{4\mathrm{U_n}+4}{\mathrm{U_n}-2} = 4V_{\mathrm{n}}$$

وبالتالي (V_n) متتالية هندسية اساسها4 و حدها الاول $V_0 = \frac{U_0+1}{U_0-2} = -2$

لنحدد V_n بدلالة n : $V_n = V_0 q^n = -2 \times 4^n$; $\forall n \in \mathbb{N}$

ب- لنبين ان $U_n = \frac{2V_n+1}{V_n-1}$

$$V_n = \frac{U_n+1}{U_n-2} \Leftrightarrow (U_n - 2) V_n = U_n + 1 \Leftrightarrow U_n (V_n - 1) = 2V_n + 1$$

وبالتالي $\forall n \in \mathbb{N}$ $U_n = \frac{2V_n+1}{V_n-1}$

احسب نهاية (U_n)

$$U_n = \frac{2V_n+1}{V_n-1} = \frac{2 \times -2 \times 4^n + 1}{-2 \times 4^n - 1} = \frac{-4^{n+1}+1}{-2 \times 4^n - 1} = \frac{4^n(4 - \frac{1}{4^n})}{4^n(2 + \frac{1}{4^n})} = \frac{4 - \frac{1}{4^n}}{2 + \frac{1}{4^n}}$$

وبالتالي $\lim_{+\infty} U_n = \lim_{+\infty} \frac{4-\frac{1}{4^n}}{2+\frac{1}{4^n}} = 2$ لان $\lim_{+\infty} \frac{1}{4^n} = 0$

تمرين 2:

نعتبر الدالة العددية f المعرفة بمايلي : $f(x) = \begin{cases} \sqrt[3]{x(x^2-1)} \ ; x > 1 \\ x\sqrt{1-x} \quad ; x \leq 1 \end{cases}$

1- بين ان الدالة f متصلة في 1

لدينا $f(0)=1$

$\lim_{1^+} f(x) = \lim_{1^+} \sqrt[3]{x(x^2-1)} = 0 = f(0)$ ومنه f متصلة على يمين 1

$\lim_{1^-} f(x) = \lim_{1^-} x\sqrt{1-x} = 0 = f(0)$ ومنه f متصلة على يسار 1

وبمان $\lim_{1^+} f(x) = \lim_{1^-} f(x) = 0 = f(0)$ وبالتالي f متصلة في 1

2- أ- ادرس قابلية اشتقاق f على اليسار وعلى اليمين في 1

لندرس قابلية اشتقاق f على اليسار في 1

$$\lim_{1^-} \frac{x\sqrt{1-x}}{x-1} = \lim_{1^-} \frac{x\sqrt{1-x}}{-(1-x)} = \lim_{1^-} \frac{-x}{\sqrt{1-x}} = -\infty$$

وبالتالي f غير قابلية اشتقاق على اليسار في 1

لندرس قابلية اشتقاق f على االيمين في 1

$$\lim_{1^+}\frac{\sqrt[3]{x(x^2-1)}}{x-1}=\lim_{1+}\sqrt[3]{\frac{x(x^2-1)}{(x-1)^3}}=\lim_{1^+}\sqrt[3]{\frac{x(x+1)}{(x-1)^2}}=+\infty$$

وبالتالي f غير قابلية اشتقاق على اليمين في 1

ت- اعط تأويلا هندسيا للنتيجتين المحصل عليها

- **وبماان f غير قابلية اشتقاق على اليسار في 1 فأن منحنى الدالة f يقبل نصف مماس عمودي نحو الاسفل على يسار 1**
- **بماان f غير قابلية اشتقاق على اليمين في 1 فأن منحنى الدالة f يقبل نصف مماس عمودي نحو االاعلى على يمين 1**

3- ضع جدول تغيرات الدالة f

لكل $x>1$ **لدينا** $f(x)=\sqrt[3]{x(x^2-1)}$

الدالة $x\mapsto x(x^2-1)$ موجبة قطعا وقابلة الاشتقاق على $]1;+\infty[$

اذن الدالة $f(x)=\sqrt[3]{x(x^2-1)}$ قابلة الاشتقاق على $]1;+\infty[$

لدينا : $\forall x\in]1;+\infty[\ ;f'(x)=\frac{3x^2-1}{3\sqrt[3]{(x(x^2-1))^2}}$

اشارة **f'(x)** على $]1;+\infty[$ هي اشارة $3x^2-1$ بماان $x>1$ فإن $3x^2>3$ وبالتالي $3x^2-1>0$

ليكن x عنصر من المجال $]-\infty;1[$ **لدينا** $f(x)=x\sqrt{1-x}$

الدالة $f=uv$ اذن **f** قابلة الاشتقاق على $]1;+\infty[$ (لانها جداء دالتين قابلتين للاشتقاق)

لدينا : $\forall x\in]1;+\infty[\ ;f'(x)=\sqrt{1-x}+x\frac{-1}{2\sqrt{1-x}}=\frac{2-3x}{2\sqrt{1-x}}$

- اشارة **f'(x)** على $]1;+\infty[$ هي اشارة $2-3x$

x	$-\infty$	$\frac{2}{3}$	$+\infty$
2-3x	+	0	-

❖ جدول تغيرات الدالة f

x	$-\infty$		$\frac{2}{3}$		1		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	-	$\|\|$	+	
$f(x)$	$-\infty$	↗	$\frac{2\sqrt{3}}{9}$	↘	0	↗	$+\infty$

4- أ- احسب $\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}$ واول هندسيا النتيجة المتوصل اليها

احسب $\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}$:

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x\sqrt{1-x}}{x}=\lim_{x\to-\infty}\sqrt{1-x}=+\infty$$

التاويل الهندسي :

لدينا $\lim_{x\to-\infty}f(x)=-\infty$ و $\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=+\infty$

وبالتالي فإن منحنى الدالة f يقبل فرعا شلجميا اتجاهه محور الاراتيب بجوار $-\infty$

ب- بين ان $\lim_{x\to+\infty}(f(x)-x)=0$،ماذا تستنتج ؟

لنحسب $\lim_{x\to+\infty}(f(x)-x)=0$:

$$\lim_{x\to+\infty}(f(x)-x)=\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt[3]{x(x^2-1)}-x\right)=\lim_{+\infty}\frac{x^3-x-x^3}{\sqrt[3]{(x(x^2-1))^2}+x\sqrt[3]{x(x^2-1)}+x^2}$$

$$\lim_{+\infty}\frac{-x}{\sqrt[3]{(x(x^2-1))^2}+x\sqrt[3]{x(x^2-1)}+x^2}=\lim_{+\infty}\frac{-1}{x(\sqrt[3]{(1-\frac{1}{x^2})^2}+\sqrt[3]{x(x^2-1)}+x}=0$$

(لان $\lim_{+\infty}x(\sqrt[3]{\left(1-\frac{1}{x^2}\right)^2}+\sqrt[3]{x(x^2-1)}+x=+\infty$)

التاويل الهندسي :

لدينا $\lim_{x\to-\infty}f(x)=+\infty$ و $\lim_{x\to-\infty}f(x)-x=0$

وبالتالي فإن منحنى الدالة f يقبل مقاربا مائلا معادلته y=x بجوار $+\infty$

ج-ادرس الوضع النسبي للمنحنى الدالة f بالنسبة للمستقيم (Δ) الذي معادلته $y = x$

$$f(x) - x = \frac{-x}{\sqrt[3]{(x(x^2-1))^2}+x\sqrt[3]{x(x^2-1)}+x^2}$$

وبماأن $\sqrt[3]{(x(x^2-1))^2} + x\sqrt[3]{x(x^2-1)} + x^2 > 0$ و $-x < 0$ لكل x من المجال $]1;+\infty[$

وبالتالي $f(x) - x < 0$ على المجال $]1;+\infty[$

د- انشئ المنحنى (C) في معلم متعامد ممنظم

5- بين ان g قصور الدالة f على المجال $[1;+\infty[$ تقبل دالة عكسية معرفة على J تم تحديده

- لدينا $x \mapsto x^3 - x$ متصلة و موجبة على المجال $[1;+\infty[$ ومنه g متصلة على المجال $[1;+\infty[$ وتزايدية قطعا على المجال $[1;+\infty[$ وبالتالي g تقبل دالة عكسية معرفة على المجال J

$$g([1;+\infty[) = [g(1);\lim_{+\infty} f(x)[= [0;+\infty[$$

- انشئ $(C_{g^{-1}})$منحنى الدالة g^{-1} في نفس المعلم السابق

منحنايان $(C_{g^{-1}})$ و (C_g) متماثلان بالنسبة للمنصف الاول للمعلم ، اي بالنسبة للمستقيم ذي المعادلة $y = x$

تمرين3(*): لتكن $(\mathrm{U_n})$ المتتالية العددية المعرفة بمايلي : $\begin{cases} \mathrm{U_0} = U_1 = 1 \\ \mathrm{U_{n+1}} = \mathrm{U}_n + U_{n-1}\ ; \mathrm{n} \geq 1 \end{cases}$

1- بين ان لكل n من $\mathbb{N}$: $U_n \geq n$ ثم احسب نهاية U_n

- لنبين ان لكل n من $\mathbb{N}$: $U_n \geq n$

من اجل n=0 لدينا $\mathrm{U_0} = 1$ و $1 \geq 0$ اذن $\mathrm{U_0} \geq 0$

نفترض ان : $\forall n \in \mathbb{N}\ ;\ U_n \geq n$ و نبين ان $U_{n+1} \geq n + 1$

لدينا $\mathrm{U_{n+1}} = \mathrm{U}_n + U_{n-1}$ و اي ان $\mathrm{U_{n+1}} - \mathrm{U}_n = U_{n-1} > 0$

(لان $U_{n-1} \geq n - 1 > 0$) ومنه فإن $(\mathrm{U_n})$ المتتالية تزايدية قطعا

اي ان $U_n \geq U_{n-1} \geq U_1$

وبالتالي $U_{n+1} = U_n + U_{n-1} \geq n + 1$ اي $U_{n+1} \geq n + 1$

وبالتالي لكل n من $\mathbb{N}$: $U_n \geq n$

ومنه $\forall n \in \mathbb{N}\ ;\ 1 \leq U_n < 2$

احسب نهاية U_n :

لدينا $\lim_{+\infty} n = +\infty$ وبماان $U_n \geq n$ وبالتالي $\lim_{+\infty} U_n = +\infty$

-2 بين بالترجع ان : $\forall n \in \mathbb{N}^*\ ;\ {U_n}^2 = U_{n-1} \times U_{n+1} + (-1)^n$

من اجل n=1 لدينا $_1 = 1$ و $U_0 = 1$ و $U_2 = U_1 + U_0 = 2$

وبالتالي $ {U_1}^2 = U_0 \times U_2 + (-1)^1 = 2 - 1 = 1$

نفترض ان : $\forall n \in \mathbb{N}^*\ ;\ {U_n}^2 = U_{n-1} \times U_{n+1} + (-1)^n$

و نبين ان ${U_{n+1}}^2 = U_n \times U_{n+2} + (-1)^{n+1}$

لدينا $_{n+1} = U_n + U_{n-1}$ ومنه $U_{n+1} \times U_{n+1} = U_n \times U_{n+1} + U_{n-1} \times U_{n+1}$

فإن ${}_{n+1}{}^2 = U_n \times U_{n+1} + {U_n}^2 - (-1)^n$

اي ${U_{n+1}}^2 = U_n(\underbrace{U_{n+1} + U_n}_{U_{n+2}}) - (-1)^n$

وبالتالي ${}_{n+1}{}^2 = U_n \times U_{n+2} + (-1)^{n+1}$

اذن $\forall n \in \mathbb{N}^*\ ;\ {U_n}^2 = U_{n-1} \times U_{n+1} + (-1)^n$

-3 نضع ان $\forall n \in \mathbb{N}\ ;\ V_n = \frac{U_{n+1}}{U_n}$

بين ان $V_{n+1} - V_n = \frac{(-1)^n}{U_n U_{n+1}}$، ثم استنتج نهاية $V_{n+1} - V_n$

لنبين ان $V_{n+1} - V_n = \frac{(-1)^n}{U_n U_{n+1}}$

لدينا $V_n = \frac{U_{n+1}}{U_n}$ اي $V_{n+1} = \frac{U_{n+2}}{U_{n+1}}$

يعني ان $V_{n+1} - V_n = \frac{U_{n+2}}{U_{n+1}} - \frac{U_{n+1}}{U_n} = \frac{U_n \times U_{n+2} - U_{n+1}^2}{U_n U_{n+1}} = \frac{-(-1)^{n+1}}{U_n U_{n+1}} = \frac{(-1)^n}{U_n U_{n+1}}$

(لان ${U_{n+1}}^2 = U_n \times U_{n+2} + (-1)^{n+1}$)

لنستنتج نهاية $V_{n+1} - V_n$:

لان $U_{n+1} \geq n + 1$

حسب سؤال 1) لدينا $\lim_{+\infty} U_n = +\infty$ فإن $\lim_{+\infty} U_{n+1} = +\infty$

وبالتالي $\lim_{+\infty} U_n \times U_{n+1} = +\infty$

وبماأن : $\frac{-1}{U_nU_{n+1}} \leq V_{n+1} - V_n = \frac{(-1)^n}{U_nU_{n+1}} \leq \frac{1}{U_nU_{n+1}}$

ولدينا $\lim_{+\infty} \frac{1}{U_nU_{n+1}} = \lim_{+\infty} \frac{-1}{U_nU_{n+1}} = 0$

وبالتالي حسب مبرهنة الدركيين فإن $\lim_{+\infty} V_{n+1} - V_n = 0$